**Objectif(s)**

Graphe probabiliste à deux ou trois sommets : matrice de transition, état stable d'un graphe probabiliste.

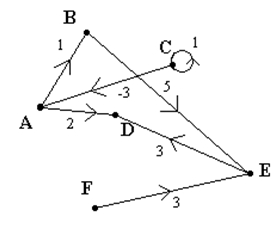
Il est nécessaire de connaître l’ensemble des définitions de base du cours "Graphes : définitions, propriétés". Les calculs (matrices) nécessitent une calculatrice ou un logiciel de mathématiques.

[Cours particuliers de Mathématiques niveau Lycée](https://www.livementor.com/cours-particuliers/Lycee/Mathematiques?widget=nov15&utm_source=http://www.cours.fr/)

**1. Définitions**

► **Graphe étiqueté**

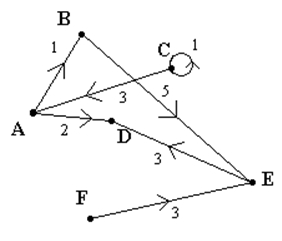
**Un graphe étiqueté** est un graphe orienté où chaque arête est étiquetée par un nombre ou un mot (un dessin…).

  
**Graphe 1**  
  
  
► **Graphe pondéré**

**Un graphe pondéré** est un graphe étiqueté de nombres positifs uniquement.

Chaque nombre est appelé **poids d’une arête.**

**Le poids d’une chaîne** est la somme des poids des arêtes qui la composent.

  
**Graphe 2**  
  
  
► **Graphe probabiliste**

**Un graphe probabiliste** est un graphe orienté pondéré tel que la somme des poids des arêtes issues de chaque sommet vaut 1.

**L’état probabiliste** d’un élément est représenté par une matrice ligne.

|  |  |
| --- | --- |
| **http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/417388/img/4/1/7/4/417423.jpg**  **Graphe 3** | Ci-contre un graphe probabiliste à deux sommets, puis un autre graphe probabiliste à trois sommets.  Pour le graphe ci-contre à deux sommets, l’état P0 est donné par l’énoncé : « au départ on considère que 80 % des éléments sont dans A ».  La matrice sera alors : P0 = (0,80  0,20). |
| **http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/417388/img/4/1/7/4/417424.jpg**  **Graphe 4** |

► **Matrice de transition**

**Pour déterminer l’état probabiliste à l’étape n**, on a les relations : http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/417388/img/4/1/7/4/417413.gifet http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/417388/img/4/1/7/4/417415.gif où M est la matrice de transition.

**La matrice de transition** **d’un graphe probabiliste à n sommets** est une matrice carrée d’ordre n, pour laquelle chaque coefficient de la ie ligne je colonne est le poids de l’arête orientée de i vers j si cette arête existe, 0 sinon.

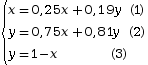
|  |  |
| --- | --- |
| http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/417388/img/4/1/7/4/417418.gif  **Matrice pour le graphe 3** | http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/417388/img/4/1/7/4/417421.gif  **Matrice pour le graphe 4** |

La somme des éléments de chaque ligne vaut 1.

**2. État stable**

Pour tout graphe probabiliste dont la matrice de transition ne comporte pas de 0, l’état Pn à l’étape n tend vers un état indépendant de l’état initial P0 quand n devient grand.

**À l’état stable**, on a : P = P × M où P est l’état stable.

Par exemple, avec les conditions indiquées pour le graphe à deux sommets, en posant :  
P = (x ; y) avec x + y = 1 soit y = 1- x.  
  
Nous avons :  
http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/417388/img/4/1/7/4/417427.gif  
  
http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/417388/img/4/1/7/4/417429.gif  
  
Ce qui donne un système de trois équations à deux inconnues :  
  
  
  
En reportant (3) dans (1) on obtient :  
x - 0,25x = 0,19(1 - x)  
0,75x = 0,19 - 0,19x  
0,94x = 0,19  
http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/417388/img/4/1/7/6/417619.gif  
  
D’où : http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/417388/img/4/1/7/6/417621.gif, on en déduit : http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/417388/img/4/1/7/6/417623.gif.

**3. Calculs et utilisation d'une calculatrice**

On utilise la calculatrice pour le calcul de puissances de la matrice.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Calcul de :** | **TI 82 stats (ou 83-84)** | **Casio Graph 35+** | **TI-Nspire** |
| http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/417388/img/4/1/7/4/417407.gif  **Résultat :**  http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/417388/img/4/1/7/4/417409.gif | • Dans le menu "matrice", "edit", choisir A par exemple, donner la dimension 2×2.  • Valider, remplir la matrice.  • Choisir de nouveau le menu matrice, appuyer sur "Entrer".  • Puis touches ^2. • Valider. | • Menu "Mat" puis sur un nom de matrice flèche droite donner les dimensions, valider.  • Remplir la matrice.  • Menu "Run", puis touche "OPTN", F2 MAT s’affiche, touche "ALPHA" A puis ^2.  • Valider. | • Appuyer sur menu, choix 7 matrices et vecteurs, "créer" donner les dimensions, valider.  • Remplir la matrice puis ^2 et "entrée". |